Studio di funzione

Per eseguire lo studio di una funzione e successivamente tracciarne il grafico bisogna sviluppare i seguenti punti:

- dominio o campo di esistenza;
- intersezioni con gli assi;
- segno della funzione;
- simmetrie;
- asintoti;
- crescenza, decrescenza, massimi e minimi;
- concavità e punti di flesso;

Eseguiamo lo studio della funzione

$$y = x^4 - 2x^2$$

<u>dominio o campo di esistenza:</u>

la funzione essendo razionale intera è definita $\forall x \in$R;

<u>intersezioni con gli assi:</u>

per determinare le intersezioni con l'asse delle x bisogna risolvere il sistema

$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ y = 0 \end{cases}$ che ha per soluzioni (0,0) ,(-$\sqrt{2}$,0) . ($\sqrt{2}$,0) ;

le intersezioni con l'asse delle y si determinano risolvendo il sistema

$\begin{cases} y = x^4 - 2x^2 \\ x = 0 \end{cases}$ che ammette come soluzione (0,0)

<u>segno della funzione:</u>

il segno si trova risolvendo la disequazione

$$x^4 - 2x^2 > 0$$

le cui soluzioni sono $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$, la funzione è positiva per questi valori, è negativa per $-\sqrt{2} < x < 0$ e $0 < x < \sqrt{2}$;

<u>simmetrie:</u>

dato che f(x)=f(-x), la funzione è simmetrica rispetto all'asse y (pari);

<u>asintoti:</u>

la funzione, essendo razionale intera, non ha asintoti,

<u>crescenza, decrescenza, massimi e minimi relativi</u>

gli intervalli di crescenza si determinano imponendo la derivata prima maggiore di zero,

$y' = 4x^3 - 4x$

$y' > 0$

$4x^3 - 4x > 0$

le soluzioni di questa disequazione sono –1<x<0 e x>1, la funzione quindi cresce per questi valori, decresce per x<-1 e 0<x<1;

di conseguenza –1 e 1 sono dei minimi relativi, 0 un massimo relativo;

le ordinate sono f(-1)=-1, f(1)=-1, f(0)=0;

<u>Concavità e punti di flesso:</u>

bisogna imporre la derivata seconda maggiore di zero

$y'' = 12x^2 - 4$;

$y'' > 0$;

$12x^2 - 4 > 0$ ha per soluzioni $x < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x > \frac{\sqrt{3}}{3}$, per questi valori la funzione volge la concavità verso l'alto, per $-\frac{\sqrt{3}}{3} < x < \frac{\sqrt{3}}{3}$ la volge verso il basso,

$x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ e $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ sono punti di flesso le cui ordinate valgono

$f(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ e $f(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

Mettendo insieme tutte le informazioni trovate, si può tracciare il seguente grafico