Forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$

Per risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$, nel caso delle funzioni razionali fratte, bisogna dividere tutti i termini del numeratore e tutti quelli del denominatore per la potenza massima che compare nella funzione.

<u>Esempio1</u>

Calcolare il valore del limite $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-4}$;

Procediamo come sopra:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+x-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2}}=\frac{1}{2};$$

<u>esempio2</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x^2+4}{x^2+x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}+\frac{4}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^3}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\infty;$$

<u>esempio3</u>

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\ \ +2}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=0.$$

Si può notare che nel primo esempio il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, nel secondo il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, nel terzo esempio il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore.
Dai risultati si può trarre la regola generale:
nel primo caso il limite è uguale al rapporto dei coefficienti delle potenze maggiori di numeratore e denominatore, nel secondo il limite è uguale a ∞*, nel terzo infine è uguale a* zero.
Resta da stabilire nel secondo caso il segno di ∞, quando la x tende a $\pm\infty$. In questa eventualità il segno si stabilisce in base ai segni delle potenze maggiori di numeratore e denominatore calcolandone il rapporto, come nell'esempio che segue.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+3x+2}{2x^2+x-4}=-\infty$ (la potenza maggiore del numeratore ha il segno - , quella del denominatore +, il rapporto è quindi -).