Forma indeterminata infinito meno infinito

Uno dei casi in cui può presentarsi questa forma è il limite della funzione costituita da una differenza fra radici quadrate o da una differenza in cui compare una radice quadrata. Per calcolare il limite bisogna moltiplicare e dividere la funzione per la somma delle stesse radici quadrate nel primo caso e per quello che si ottiene scambiando il segno – col + nella seconda eventualità. In questo modo si trasforma il limite nella forma indeterminata infinito su infinito facilmente calcolabile in base ai gradi di numeratore e denominatore.

Esempio1

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{2x^2-x+4})=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+4x-5}-\sqrt{2x^2-x+4})(\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{2x^2-x+4})}{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{2x^2-x+4})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+4x-5-2x^2+x-4}{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{2x^2-x+4})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+5x-9}{\sqrt{x^2+4x-5}+\sqrt{2x^2-x+4})}=-\infty$$

Questo risultato è giustificato dal fatto che il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore (x^2 sotto radice equivale a x fuori dal segno di radice). Nelle forme indeterminate infinito su infinito quando il grado del numeratore è maggiore di quello del denominatore il limite è uguale a ∞. Il segno si determina con le regole dell'algebra.

Esempio 2

$$\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x+4})=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-2x+4})(x+\sqrt{x^2-2x+4})}{x+\sqrt{x^2-2x+4}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2+2x-4}{x+\sqrt{x^2-2x+4}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-4}{x+\sqrt{x^2-2x+4}}=\frac{2}{2}=1$$

In questo caso il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore e il limite è uguale al rapporto dei coefficienti delle potenze maggiori di numeratore e denominatore. Si considerano 2 come coefficiente della x del numeratore, 1+$\sqrt{1}$ come somma dei coefficienti delle x del denominatore, tenendo conto ovviamente che $\sqrt{1}=1$.

Esempio3

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+x-2})=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+3}-\sqrt{x^2+x-2})(\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-2})}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-2})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+3-x^2-x+2}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-2})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5}{\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-2})}=0$$

In questa eventualità il grado del denominatore è maggiore di quello del numeratore e il limite è uguale a 0.

Esempio4

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{2x^2+3x-4}-\sqrt{2x^2+x-5})=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2x^2+3x-4}-\sqrt{2x^2+x-5})(\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2x^2+x-5})}{\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2x^2+x-5})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x-4-2x^2-x+5}{\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2x^2+x-5})}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{\sqrt{2x^2+3x-4}+\sqrt{2x^2+x-5})}=\frac{2}{2\sqrt{2}}$$

Questo esempio è simile al 2.