Le Matrici

Una **matrice** è una tabella di numeri o più in generale di **elementi** disposti quindi secondo righe e colonne. Le matrici si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto, gli elementi con quelle minuscole e ciascuno è caratterizzato da due **indici**, il primo rappresenta la riga il secondo la colonna.

A= $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}$ (matrice mxn in generale; m righe, n colonne)

L'elemento generico di una matrice si denota con a_{ij} e si trova all'i-esima riga e alla j-esima colonna.

Se il numero delle righe è uguale a quello delle colonne la matrice si dice **quadrata**, se è diverso **rettangolare**. Nella matrice quadrata gli elementi che hanno gli indici uguali costituiscono la **diagonale principale**. Una matrice con una sola riga è detta **matrice riga**, con una sola colonna **matrice colonna**. Una matrice quadrata con tutti gli elementi nulli eccetto quelli della diagonale principale uguali a uno è detta **unitaria**, **unità** o **identità**.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (matrice unità)

Quando tutti gli elementi sotto la diagonale principale di una matrice quadrata sono nulli, la matrice è detta **triangolare superiore,** se sono nulli quelli sopra è detta **triangolare inferiore**. La matrice quadrata che ha $a_{ij} = a_{ji}$ *si dice simmetrica*.

La **trasposta** di una matrice A, A^T è la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne.

Esempio A= $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ A^T = $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Se una matrice è simmetrica coincide con la sua trasposta.

Operazioni con le matrici.

Addizione.

L'addizione è possibile solo quando le due matrici hanno le stesse dimensioni. Ad esempio è possibile eseguire l'addizione fra due matrici 3x4, ma non fra una 3x5 e una 4x3. L'addizione si esegue addizionando fra di loro gli elementi corrispondenti.

A=$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ A+B=$\begin{pmatrix} 4+6 & 1+3 & 3+1 \\ 2+1 & 0+4 & 2+3 \\ -1+2 & 3+1 & 1+4 \end{pmatrix}$ A+B=$\begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

L'addizione fra matrici è **commutativa, associativa** ed esiste **l'elemento neutro** costituito dalla matrice nulla (tutti gli elementi uguali a zero). Queste proprietà sono giustificate dal fatto che l'addizione fra matrici si riduce a quella fra numeri.

Moltiplicazione di un numero per una matrice.
Si esegue moltiplicando il numero per tutti gli elementi della matrice.

Moltiplicazione di matrici.
Questa operazione si può eseguire solo quando il numero delle colonne della prima è uguale al numero delle righe della seconda matrice.
Ad esempio è possibile eseguire la moltiplicazione fra una matrice 3x2 e una matrice 2x4.
Moltiplicando in generale una matrice mxn con una matrice nxp si ottiene una matrice mxp.
La moltiplicazione si esegue secondo un procedimento detto **righe per colonne** che consiste nel moltiplicare ciascuna riga della prima matrice per tutte le colonne della seconda e che verrà illustrato con un esempio.

A=$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ B=$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ AxB=$\begin{pmatrix} 2x1+1x2+3x3 & 2x2+1x3+3x4 \\ 1x1+2x2+4x3 & 1x2+2x3+4x4 \end{pmatrix}$

AxB=$\begin{pmatrix} 13 & 19 \\ 17 & 24 \end{pmatrix}$

La moltiplicazione fra matrici, quando è possibile, **non è commutativa**, l'elemento neutro è la matrice identità.

Determinante di una matrice.
Ad ogni matrice quadrata di numeri è possibile associare un numero detto **determinante** della matrice e che si indica con due linee verticali, con D o con det.
Il determinante si può definire per via induttiva. Se la matrice ha un solo elemento il determinante è il numero stesso. Nel caso di una matrice 2x2 si opera nel modo seguente

A=$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ det(A)=$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ $=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$

Se la matrice è 3x3 si utilizza la regola di Sarrus, come segue

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$D(A)=\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Agli elementi della matrice si affiancano la prima e la seconda colonna e poi si procede come sopra.

Complemento algebrico

Il complemento algebrico A_{ij} *dell'elemento* a_{ij} *di una mtrice quadrata A è il* det*er* min*ante della* matrice che si ottiene da A eliminando l'i-esima riga e la j-esima colonna e anteponendo il segno + se i+j è pari e il segno meno se i+j è dispari.

Esempio

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Esempio numerico

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -(12-2) = -10$$

In generale, per qualunque matrice quadrata, il **determinante** è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga o una colonna qualsiasi per i rispettivi complementi algebrici.

Se A è 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Proprietà dei determinanti

Se una matrice quadrata ha una **riga o una colonna formata da zeri**, il determinante è uguale a **zero**. Questa proprietà si spiega tenendo conto che calcolando il determinante in base a quella riga o a quella colonna si ottiene la somma di prodotti nulli.

Se ad una riga o ad una colonna di una matrice quadrata si aggiunge un'altra riga o colonna moltiplicata per un numero il valore del determinante non cambia.

Giustifichiamo questa proprietà su una matrice del terzo ordine. Data

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Il suo determinante è uguale a

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

Otterremo lo stesso risultato se alla prima riga aggiungiamo la seconda moltiplicata per un numero k. La matrice ottenuta è

$$B=\begin{pmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Calcoliamo ora il determinante con la regola di Sarrus

$$\begin{matrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} & a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$$

$$a_{22}a_{33}(a_{11}+ka_{21})+a_{23}a_{31}(a_{12}+ka_{22})+a_{21}a_{32}(a_{13}+ka_{23})-a_{21}a_{33}(a_{12}+ka_{22})-a_{23}a_{32}(a_{11}+ka_{21})-$$
$$a_{22}a_{31}(a_{13}+ka_{23})=$$

$$a_{11}a_{22}a_{33}+ka_{21}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+ka_{22}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}+ka_{21}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-ka_{21}a_{22}a_{33}-$$
$$a_{11}a_{23}a_{32}-ka_{21}a_{23}a_{32}-ka_{22}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}=$$
$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Se una matrice quadrata si moltiplica per un numero k, il determinante risulta moltiplicato per k.

Una matrice quadrata e la sua trasposta hanno lo stesso determinante.

D(A)=D(A^T)

Questa proprietà si può dimostrare sviluppando per A secondo la prima riga e A^T secondo la prima colonna.

Inversa di una matrica

Data una matrice quadrata A col determinante D(A) diverso da zero, la sua inversa si indica con A^{-1} ed è quella matrice tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ (matrice identità).
Si calcola in base alla regola che segue

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \frac{A_{31}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \frac{A_{32}}{D} \\ \frac{A_{13}}{D} & \frac{A_{23}}{D} & \frac{A_{33}}{D} \end{pmatrix}$$

D=D(A)

www.sefed.altervista.org