Funzioni di due variabili

Una **funzione di due variabili** è una relazione che associa ad ogni coppia di numeri reali (x, y)$\in D \subseteq R^2$, uno ed un solo valore reale di z. D è il **dominio** della funzione, x e y sono le **variabili indipendenti**, z la **variabile dipendente**.

Per indicare una funzione di due variabili si usa la scrittura z = f (x, y) .

Il **dominio** è l'insieme dei valori reali che si possono attribuire alle variabili indipendenti x e y affinché sia determinabile il corrispondente valore della variabile dipendente z.

Sono esempi di funzioni di due variabili

$z = 3x^2y + 2xy$ $\qquad$ $z = \dfrac{xy - 3x^2y}{x + y - 4}$ $\qquad$ $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

Il dominio della prima funzione è costituito da tutte le coppie di numeri reali appartenenti a R^2 o da tutti i punti del piano, infatti in questa funzione le operazioni che occorre svolgere per trovare il valore di z, noti quelli di x e y, sono sempre possibili nel campo dei numeri reali. Considerato che i punti del piano si rappresentano mediante coppie di numeri reali è indifferente parlare di queste ultime o di punti del piano.

Il dominio della seconda funzione è formato da tutte le coppie di numeri reali escluse quelle che annullano il denominatore (i punti che si trovano sulla retta di equazione $x + y - 4 = 0$).

La terza funzione è definita sui punti esterni della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e sui punti della circonferenza stessa. Questo risultato si ottiene ponendo il radicando maggiore o uguale a zero, infatti la radice quadrata di un numero è possibile solo quando il radicando è positivo o nullo.

Rappresentando una funzione di due variabili in un sistema tridimensionale xyz, analogamente a quella di una variabile per la quale si usa il piano xy, il dominio si trova nel piano xy. In definitiva per trovare il dominio di una funzione di due variabili si utilizzano le seguenti regole:

1) se la funzione è razionale intera il dominio è costituito da R^2, cioè da tutte le coppie ordinate di numeri reali;
2) se la funzione è razionale fratta il dominio si determina ponendo il denominatore diverso da zero;
3) se la funzione è irrazionale a indice pari il dominio si calcola ponendo il radicando ≥ 0;
4) se la funzione è logaritmica si pone l'argomento > 0.

Nei casi più complessi il dominio si determina mediante un sistema in cui si inseriscono le varie condizioni.

Ad esempio per trovare il dominio della funzione $z = \sqrt{y - x^2 - x + 3} + \ln(x + y - 5)$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - x^2 - x + 3 \geq 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$$

Il **grafico** di una funzione di due variabili è costituito da una superficie e, a differenza di quello di una funzione di una variabile che è una linea, è difficile da rappresentare a meno che non si disponga di un software ad hoc.

Una semplice rappresentazione grafica di una funzione di due variabili è quella delle **linee** o **curve di livello.**

Le linee di livello si ottengono sezionando il grafico di una funzione di due variabili con dei piani paralleli al piano xy e proiettando le linee ottenute su quest'ultimo piano. Per determinarle si risolve il sistema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = k \end{cases}$$

, si trovano cioè i punti di intersezione fra la funzione (il suo grafico) e un fascio di piani paralleli al piano xy. L'insieme di questi punti di intersezione costituiscono delle linee.

Per tracciare alcune di queste linee di livello basta attribuire nell'equazione risolvente il sistema numeri reali a piacere a k, generalmente si danno numeri interi.

Graficamente le **linee di livello** possono essere rette parallele, circonferenze concentriche, parabole, ellissi ecc.
Le rette parallele si hanno nel caso in cui la funzione è lineare (piano), in questa eventualità attribuendo a k valori arbitrari si ottengono rette con lo stesso coefficiente angolare e quindi parallele. La funzione

$$z = x^2 + y^2 - 10$$

ha , ad esempio, per valori positivi di k, linee di livello che sono **circonferenze concentriche**. Le linee di livello della funzione $z = 2x^2 + y - 1$ sono **parabole** i cui grafici sono situati uno all'interno dell'altro.
Dato che sostanzialmente le linee di livello si trovano sostituendo k al posto di z nella funzione, conoscendo la geometria analitica, è facile stabilire la natura delle linee di livello dall'espressione algebrica della funzione.
Le linee di livello vengono utilizzate in vari campi.
In geografia sono note le **isoipse**, linee che uniscono su una carta geografica o topografica tutti i punti aventi la stessa altitudine rispetto al livello del mare. Su una zona montana ad esempio ci sono la linea dei seicento metri, quella dei settecento metri, degli ottocento e così via.
In meteorologia le **isoterme** sono le linee che uniscono, su una carta del tempo (carta sinottica), tutti i punti con la stessa temperatura; le **isobare** quelle che uniscono i punti con la stessa pressione.
In analisi matematica le linee di livello si utilizzano per determinare i **massimi e i minimi liberi e vincolati** di una funzione di due variabili. Nel caso di massimi e minimi liberi se le linee di livello si restringono intorno ad un punto del dominio di una funzione di due variabili per valori crescenti di k, il punto rappresenta un massimo; se si restringono per valori decrescenti di k il punto è un minimo. Nel caso dei massimi e minimi vincolati questi ultimi si trovano nei punti di tangenza fra le linee di livello della funzione di due variabili e l'equazione del vincolo.
In economia si trovano le linee degli **isocosti** rappresentati dalle linee i cui punti hanno costi uguali, quelle degli isoquanti linee che uniscono punti aventi quantità uguali.
Un'altra applicazione è nella programmazione lineare. In questo tipo di problemi le linee di livello sono rette parallele e ci consentono di determinare il valore ottimo della funzione obiettivo.