Teorema dell'unicità del limite

Se una funzione f(x) ha limite l per x che tende a x_0, il limite è unico.

Per dimostrare il teorema supponiamo per assurdo che la funzione, per x tendente a x_0, *abbia due limiti distinti l e l_1, cioè:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l_1$$

In base alla definizione di limite, per il primo, in un intorno I del punto x_0 *dovrà essere:*

$$l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon \qquad (1)$$

e in un intorno I_1 *per il secondo limite si dovrà avere:*

$$l_1-\varepsilon < f(x) < l_1+\varepsilon \qquad (2)$$

Supponiamo che ε, numero arbitrario, sia uguale a $\frac{l-l_1}{2}$.

Nell'intorno $I_2 = I \cap I_1$ le due disuguaglianze (1) e (2) dovranno valere contemporaneamente, per cui si può scrivere:

$$l-\varepsilon < f(x) < l_1+\varepsilon \text{, cioè:}$$

$$l-\varepsilon < l_1+\varepsilon \text{, da cui:}$$

$$\varepsilon > \frac{l-l_1}{2}.$$

Quest'ultima disuguaglianza contrasta con una delle ipotesi quindi la funzione non può avere due limiti distinti. Il limite di una funzione, quando esiste, è unico.

Teorema del confronto

Se per tre funzioni g(x), f(x) e h(x), in un intorno del punto x_0, si verifica la disuguaglianza

$$g(x) \le f(x) \le h(x) \qquad (1)$$

e inoltre si ha:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l \quad \textit{e} \quad \lim_{x\to x_0} h(x) = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = l$$

In base alla definizione di limite, per il primo, si può scrivere:

$$l-\varepsilon < g(x) < l+\varepsilon \qquad \text{(in un intorno I di } x_0\text{)}$$

Analogamente per il secondo limite si avrà:

$$l-\varepsilon < h(x) < l+\varepsilon \qquad \text{(in un intorno } I_1 \text{ di } x_0\text{)}$$

Nell'intorno comune a $I_2 = I \cap I_1$, le due disuguaglianze suddette devono valere contemporaneamente.

In I_2, tenendo conto della (1), si può scrivere

$$l-\varepsilon < g(x) \le f(x) \le h(x) < l+\varepsilon$$

da cui $l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon$.

Di conseguenza:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l$$