www.sefed.altervista.org

Raccolta di esercizi sui limiti di funzioni

Forma indeterminata 0/0.

Quando un limite si presenta in questa forma e la funzione è razionale fratta, per togliere l'indeterminazione bisogna scomporre numeratore e denominatore, semplificare e poi passare al limite.

Esercizio 1:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^2 - 4}$$

Il numeratore si può scomporre con la regola di Ruffini, il denominatore rappresenta una differenza di quadrati.

Il limite si può dunque scrivere:

$$\lim_{x \to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x^2 - 1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \frac{3}{4};$$

Esercizio 2:

Se il limite ha la forma

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 9} - \sqrt{x^2 + 3x + 5}}{x^2 + 3x - 4} \ (*) \ ,$$

cioè se al numeratore , come in questo caso, o al denominatore compare una somma o una differenza di radici quadrate o una differenza in cui compare una radice quadrata, si deve razionalizzare il termine, effettuare le opportune semplificazioni e poi passare al limite.

Il limite * si risolve quindi come segue

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 9} - \sqrt{x^2 + 3x + 5})(\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 + 3x + 5})}{(x^2 + 3x - 4)(\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 + 3x + 5})} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - x + 9 - x^2 - 3x - 5}{(x^2 + 3x - 4)(\sqrt{x^2 - x + 9} + \sqrt{x^2 + 3x + 5})} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-4x+4}{(x^2+3x-4)(\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+3x+5})}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-4(x-1)}{(x-1)(x+4)(\sqrt{x^2-x+9}+\sqrt{x^2+3x+5})} = \frac{-4}{5(3+3)} = -\frac{2}{15}$$ (bisogna tener conto delle semplificazioni, lo stesso si farà per gli esercizi che seguono)

Esercizio 3

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2+2x-4}-\sqrt{x^2+3x-6}}{x^2-4}$$

Per calcolare il valore di questo limite si devono moltiplicare numeratore e denominatore per della frazione per $\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6}$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{(\sqrt{x^2+2x-4}-\sqrt{x^2+3x-6})(\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6})}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6})} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+2x-4-x^2-3x+6}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6})} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-x+2}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6})} =$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)\sqrt{x^2+2x-4}+\sqrt{x^2+3x-6})} = -\frac{1}{16}.$$

Esercizio 4

Calcolare il valore del seguente limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+2x+6}-3x}{x^2-5x+4}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+2x+6}-3x}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x^2+2x+6}-3x)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x+6-9x^2}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-8x^2+2x+6}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)} =$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{-2(4x^2-x-3)}{(x^2-5x+4)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)} = \lim_{x \to 1} \frac{-2(x-1)(4x+3)}{(x-4)(x-1)(\sqrt{x^2+2x+6}+3x)} = \frac{7}{36}$$