Problemi di massimo e di minimo

Con l'ausilio delle derivate si può risolvere una molteplicità di problemi. Quelli che affronteremo in questa sede sono i problemi di **massimo e di minimo**. Per impostarli , occorre stabilire qual è la grandezza che si vuole debba essere massima o minima e indicarla con la variabile dipendente y. La x dovrà rappresentare una opportuna grandezza variabile del problema da scegliere di volta in volta.
Per chiarire quanto affermato consideriamo due esempi entrambi riguardanti problemi di geometria piana.

1) **Fra i rettangoli di perimetro 2p, qual è quello di area massima**?

In questo caso con y, per quanto detto precedentemente, indichiamo l'area del rettangolo che è la grandezza da "massimizzare", con x possiamo indicare una delle due dimensioni del rettangolo.
Così l'altra dimensione sarà uguale a $\frac{2p-2x}{2}$ cioè a $p-x$.
Se si tiene conto che l'area del rettangolo è uguale al prodotto delle due dimensioni, possiamo scrivere:

$$y = x(p-x)$$ oppure

$$y = px - x^2$$

Per determinare il massimo di questa funzione calcoliamo la derivata prima, l'uguagliamo a zero e determiniamo il segno della derivata seconda nel punto trovato.

$$y' = p - 2x \;;$$
$$y' = 0;$$
$$p - 2x = 0;$$
$$x = \frac{p}{2};$$
$$y'' = -2;$$
$$y''\left(\frac{p}{2}\right) = -2 < 0$$

Considerato che la derivata seconda, nel punto in cui si annulla la derivata prima è minore di zero, possiamo affermare che la funzione ha un massimo per $x = \frac{p}{2}$ e che l'altra dimensione del rettangolo misura $\frac{2p-p}{2} = \frac{p}{2}$.
Possiamo concludere constatando che un rettangolo, di perimetro noto, ha area massima quando è un quadrato (particolare rettangolo).

2) **Fra i triangoli rettangoli aventi area uguale a S^2, qual è quello con l'ipotenusa minore?**

Indichiamo con y l'ipotenusa e con x uno dei due cateti. L'altro cateto misurerà allora $\frac{2S^2}{x}$.

Applicando il teorema di Pitagora possiamo scrivere:

$$y = \sqrt{(\frac{2S^2}{x})^2 + x^2}$$ oppure

$$y = \sqrt{\frac{4S^4}{x^2} + x^2}$$

calcolando la derivata prima avremo:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{4S^4}{x^2} + x^2}}(\frac{-8S^4x}{x^4} + 2x);$$

In questo caso utilizziamo il metodo della crescenza e decrescenza, cioè poniamo la derivata prima maggiore di zero.

$$y' > 0;$$

Se teniamo conto che la radice è una quantità positiva, dopo aver semplificato, possiamo scrivere:

$$x^4 - 4S^4 > 0;$$

Scomponendo otteniamo:

$$(x^2 - 2S^2)(x^2 + 2S^2) > 0;$$

Dato che $x^4 + 4S^4$, somma di due quadrati, è sempre positiva, la disequazione si riduce a:

$$x^2 - 2S^2 > 0$$

e ha come soluzioni $x < -\sqrt{2}S \; e \; x > \sqrt{2}S$ **;** per questi valori la funzione è crescente**,** di conseguenza ha un minimo per $x = \sqrt{2}S$.

L'altro cateto allora misurerà $\frac{2S^2}{\sqrt{2}S} = \sqrt{2}S$. In conclusione possiamo affermare che un triangolo rettangolo di area S^2 ha l'ipotenusa minore quando è isoscele.