Limiti risolvibili mediante il limite notevole

Vediamo adesso alcuni limiti che si possono risolvere utilizzando il limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1.$$

Esempio 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}.$$

Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0.
Moltiplicando numeratore e denominatore per $1+\cos x$ e svolgendo i calcoli, si ottiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}=1\cdot 0=0$$

Esempio2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}.$$

In questo caso basta moltiplicare numeratore e denominatore per 2, in modo da rendere l'argomento del seno uguale al denominatore della frazione.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sen} 2x}{2x}=\lim_{x\to 0}2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

Esempio3

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\operatorname{sen} x}{x^2}.$$

Questo limite si svolge trasformando la tangente nel rapporto di seno su coseno ed eseguendo i calcoli che seguono.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\operatorname{sen} x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\operatorname{sen} x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} x\cos x}{\cos x}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)}{\cos x}}{x^2}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^2\cos x(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x(1+\cos x)}=1\cdot 1\cdot 0=0$$

Esempio4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}.$$

Per la soluzione di questo limite si dividono numeratore e denominatore per x e poi si procede come nell'esempio 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\operatorname{sen} 2x}{2x}}{\frac{3\operatorname{sen} 3x}{3x}}=\frac{2}{3}$$