Funzioni continue e discontinue

Una funzione f(x) è **continua** in un punto x_0 se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, cioè se il limite nel punto è uguale al valore che la funzione assume in esso.

Se una funzione è continua in un punto, ivi il suo grafico non presenta interruzioni. Una funzione che non è continua in un punto si dice **discontinua**.

Quando la continuità esiste in tutti i punti di un intervallo, la funzione si dice **continua nell'intervallo.**

Le funzioni razionali intere sono continue $\forall x \in R$ (numeri reali). Ad esempio

$$y = 3x^2 + 4x - 2$$

è continua per ogni valore reale di x in quanto il limite per x che tende ad un qualsiasi numero reale coincide col valore della funzione in esso.

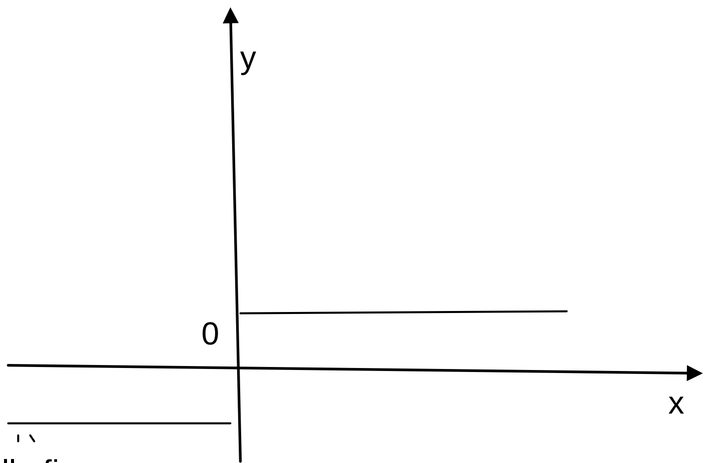
Le funzioni razionali fratte sono continue per qualsiasi valore reale eccetto i punti in cui si annulla il denominatore.

La funzione

$$y = \frac{x+3}{x-2}$$

non è continua (è discontinua) nel punto x=2.

La funzione $y = \frac{|x|}{x}$ è discontinua in x=0, in questo punto non è definita e di conseguenza il limite non può essere uguale f(0) perché quest'ultimo valore non esiste.



La situazione è illustrata nella figura.

Le discontinuità possono essere di tre tipi**, I**, **II** e **III specie.**

Una funzione f(x) ha una discontinuità di I specie in un punto x_0 se in esso non è definita ma esistono i limiti destro e sinistro diversi fra loro, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

In questo caso si dice che la funzione presenta nel punto un **salto**. E' il caso della funzione in figura che ha un salto uguale a 2 differenza fra limite destro (1) e limite sinistro (-1).

Una funzione f(x) ha una discontinuità di II specie in un punto x_0 se in esso non è definita ma almeno uno dei due limiti destro o sinistro vale ∞, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{o} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

L'infinito può essere sia positivo sia negativo.

Si ha una discontinuità di III specie per la funzione f(x) in un punto x_0 se in esso non è definita ma esistono i limiti destro e sinistro uguali fra loro, cioè se

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

In questo caso la discontinuità è detta **eliminabile** in quanto al grafico della funzione manca solo un punto la cui ordinata può essere sostituita col valore del limite.

La funzione

$$y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

ha una discontinuità di III specie nel punto x=1. Infatti sia il limite sinistro, sia il limite destro, per x che tende a 1 sono uguali a 2.