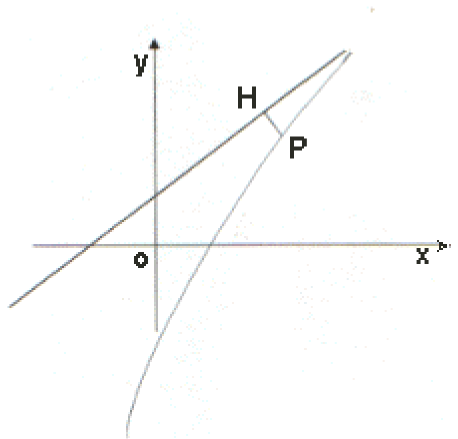
Asintoti



Consideriamo una funzione f(x) avente il grafico con un ramo che si prolunga all'infinito e un punto P(x,y) su di esso, se esiste una retta tale che la distanza PH dal grafico tende a zero al tendere di P all'infinito si dice che questa retta è un **asintoto** della funzione. Nella figura sono rappresentati il grafico di una funzione ed un suo asintoto.

Gli asintoti possono essere di tre tipi **verticali, orizzontali e obliqui.**

Se per una funzione f(x) si verifica che:

$\lim_{x\to c} f(x)=\infty \Rightarrow$ la retta di equazione x=c è un asintoto verticale della funzione.

Infatti in questa eventualità la distanza della retta dal grafico è $|x-c|$ che tende a zero quando P e quindi y, cioè la funzione tende all'infinito, perché x tende a c.

Nell'ipotesi in cui $\lim_{x\to\infty} f(x)=l \Rightarrow$ la retta di equazione y=l è asintoto orizzontale della funzione.

Se si verifica che $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow$ la funzione può avere un asintoto obliquo del tipo

y=mx+q,

dove $m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$

e $q=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$.

In questo caso anche se esiste il limite, la funzione non sempre ha un asintoto obliquo, le funzioni razionali intere godono di questa proprietà.

Esempi

Determinare gli asintoti della funzione $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

Gli asintoti verticali sono da ricercare mediante i valori che annullano il denominatore, cioè 1 e –1.

Dato che $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\infty$, la retta di equazione x=1 è un asintoto verticale della funzione;

lo stesso si verifica effettuando il limite per x che tende a –1 (x=-1 è asintoto verticale);

considerato che $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=1 \Rightarrow$ la retta di equazione y=1 è asintoto orizzontale.

Troviamo ora gli asintoti della funzione $y=\frac{x^3+1}{x^2+1}$

Non vi sono asintoti verticali in quanto il denominatore non si annulla mai;

Per il fatto che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}=\infty,$$

la funzione ha un asintoto obliquo del tipo y=mx+q,

ora $m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x^3+x}=1,$

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3+1}{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x^2+1}=0,$$

l'asintoto ha dunque equazione y=x.