

Risoluzione dei triangoli rettangoli

Risolvere un triangolo rettangolo significa determinare tutti i suoi elementi (lati e angoli) partendo da alcuni di essi. E' indispensabile che almeno uno sia lineare (un lato).

Consideriamo un triangolo rettangolo che ha un vertice nel centro di una circonferenza goniometrica come nella figura in alto. Indichiamo con α , β e γ le misure degli angoli e con a, b e c le misure dei lati del triangolo, β è l'angolo retto, b la misura dell'ipotenusa, a e c quelle dei due cateti.

I triangoli ABC e APH sono simili e quindi hanno i lati in proporzione, cioè

$$CB:PH=AC:AP$$

Sostituendo le misure dei lati e la funzione goniometrica si ottiene

$$a:\text{sen}\alpha=b:1$$

da cui $a=b\text{sen}\alpha$ (*)

Abbiamo determinato la prima relazione per la risoluzione dei triangoli rettangoli.

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto di quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto al cateto.

La regola vale anche per l'altro cateto, possiamo quindi scrivere $c=b\text{sen}\gamma$.

Per la similitudine dei triangoli suddetti si ha ancora

$$AB:AH=AC:AP$$

da cui si ottiene

$$c:\cos\alpha=b:1$$

e risolvendo

$$c=b\cos\alpha \quad (**)$$

In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto di quella dell'ipotenusa per il coseno dell'angolo adiacente al cateto.

La relazione scritta per l'altro cateto è

$$a=b\cos\gamma$$

Facendo il rapporto membro a membro fra * e ** si ricava

$$\frac{a}{c} = \frac{b\sin\alpha}{b\cos\alpha}$$

$$\frac{a}{c} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$a = c\operatorname{tg}\alpha$$

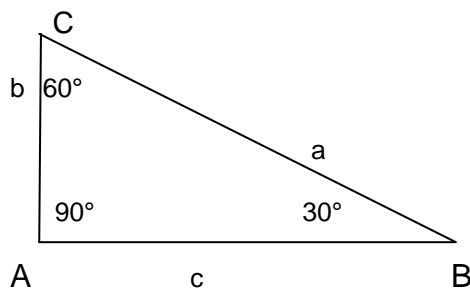
In ogni triangolo rettangolo la misura di un cateto è uguale al prodotto di quella dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.

Per l'altro cateto si ha

$$c = a\operatorname{tg}\gamma$$

Problema

Determinare tutti gli elementi di un triangolo rettangolo sapendo che un angolo misura 60° e un cateto 4.



Il primo elemento che si può trovare è il terzo angolo β , infatti tenuto conto che $\alpha=90^\circ$,

$\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Supponiamo $b=4$.

da $b = a \operatorname{sen} \beta$ si ottiene $a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$ e sostituendo i valori $a = \frac{4}{\operatorname{sen} 30^\circ} = 4 \cdot 2 = 8$.

$$c = a \operatorname{sen} \gamma \quad c = 8 \operatorname{sen} 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Il triangolo è risolto in quanto abbiamo determinato tutti gli elementi.

Problema

Calcolare tutti gli elementi di un triangolo rettangolo sapendo che i cateti misurano $\sqrt{3}$ e 3.

Il problema si può risolvere applicando la regola della tangente.

Facendo riferimento alla figura del precedente se indichiamo $c=3$ e $b = \sqrt{3}$

possiamo scrivere

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{c} \quad \text{cioè} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

quindi $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

Per calcolare a utilizziamo $a = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta}$ quindi $a = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{3}$.