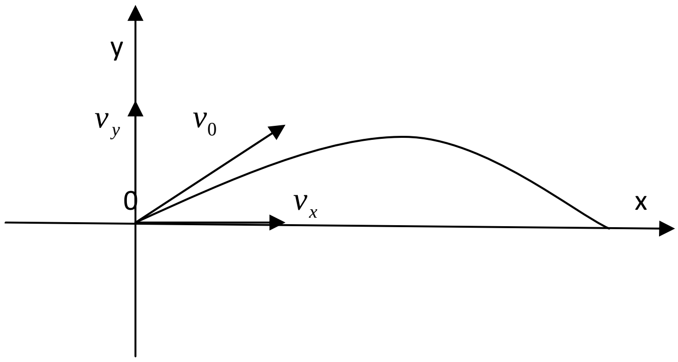
Moto di un proiettile

Il moto di un proiettile è costituito dalla composizione di due moti, uno orizzontale e l'altro verticale. Quello orizzontale è rettilineo uniforme, il verticale è naturalmente decelerato.

Questo accade perché su un proiettile, lanciato ad esempio da un cannone che ha una inclinazione di un certo angolo rispetto al piano orizzontale, agisce la gravità che durante il percorso tende a farlo abbassare.

La situazione si può schematizzare con una rappresentazione in un sistema di assi cartesiani ortogonali.



Indichiamo con θ l'angolo formato fra il vettore di modulo v_0 e l'asse delle x.

Le componenti della velocità sono

$$v_x = v_0 \cos\theta$$

$$v_y = v_0 sen\theta - gt$$

Le leggi orarie, tenendo conto dei due tipi di moto, sono

$$x(t) = v_0 \cos\theta t$$

$$y(t) = v_0 sen\theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

Ricaviamo ora la variabile t dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda.

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\theta} \qquad y = v_0 sen\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2\theta}$$

Operando le opportune semplificazioni e tenendo conto che $\frac{sen\theta}{\cos\theta} = tg\theta$, si ottiene

$$y = tg\theta\, x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\theta} x^2$$

Questa è l'equazione di una parabola, il moto di un proiettile è detto anche moto parabolico.

Determiniamo ora la gittata. Dal punto di vista geometrico è l'ascissa del punto d'intersezione fra la parabola e l'asse delle x che si ottiene risolvendo l'equazione $tg\theta\, x - \dfrac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2 = 0$ ottenuta dal sistema fra l'equazione della parabola e quella dell'asse delle x, y=0.

E' un'equazione spuria che si risolve raccogliendo la x.

$x(tg\theta - \dfrac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x) \ = 0$ una soluzione è x=0 , la gittata è l'altra radice

$$x = \frac{tg\theta}{\dfrac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}} = \frac{sen\theta}{\cos\theta}\cdot\frac{2{v_0}^2\cos^2\theta}{g} \ = \frac{{v_0}^2 2sen\theta\cos\theta}{g}$$, da cui si ottiene

$$x = \frac{{v_0}^2 sen2\theta}{g} \ .$$

Il valore più alto che raggiunge il proiettile $y_{\max}$ è l'ordinata del vertice della parabola.

In una parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$ il vertice ha coordinate $V = (-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a})$, nel nostro caso $\Delta = tg^2\theta$, quindi $y_{\max} = -\dfrac{tg^2\theta}{-\dfrac{4g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}}$

$$y_{\max} = \frac{sen^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{2{v_0}^2\cos^2\theta}{4g}$$

In conclusione

$$y_{\max} = \frac{{v_0}^2 sen^2\theta}{2g}$$

Questa breve trattazione fa parte del sito Paginedimatematica www.sefed.altervista.org