www.sefed.altervista.org

Massimi e minimi di una funzione di due variabili

Massimi e minimi relativi e assoluti

Una funzione di due variabili z=f(x,y) definita in un insieme D ha un **massimo relativo** in un punto $P(x_0, y_0) \in D$, se $\exists$ un intorno $I_{(P)} / \ \forall (x,y) \in I_{(P)},\ f(x,y) \leq f(x_0, y_0)$.

Una funzione di due variabili z=f(x,y) definita in un insieme D ha un **minimo relativo** in un punto $P(x_0, y_0) \in D$, se $\exists$ un intorno $I_{(P)} / \ \forall (x,y) \in I_{(P)},\ f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$.

Una funzione di due variabili z=f(x,y) definita in un insieme D ha il **massimo assoluto** nel punto del suo dominio in cui assume il valore maggiore, il **minimo assoluto** nel punto in cui assume il valore minore.

Se consideriamo che il grafico di una funzione di due variabili è una superficie, il massimo assoluto si ha in corrispondenza del punto più alto, il minimo assoluto si ha nel punto più basso, i massimi relativi sono le vette, i minimi relativi gli avvallamenti.

Massimi e minimi liberi e vincolati

I massimi e i minimi di una funzione di due variabili possono essere **liberi e vincolati**. Sono liberi quando le variabili indipendenti (x,y) non sono soggette a limitazioni, cioè quando possono assumere tutti i valori del dominio, si dicono vincolati quando le variabili indipendenti (x,y) sono sottoposte a vincoli o limitazioni. In termini matematici i vincoli sono rappresentati da equazioni o disequazioni.

Se ad esempio si vogliono determinare i massimi e i minimi vincolati della funzione $z = x^2 + y^2 - 2x$ col vincolo $2x + 3y + 4 = 0$, significa che la ricerca va ristretta ai punti della retta di equazione $2x + 3y + 4 = 0$.

Calcolo dei massimi e minimi relativi

Per determinare i massimi e i minimi relativi eventuali di una funzione di due variabili intera z=f(x,y), si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} f_x^{'} = 0 \\ f_y^{'} = 0 \end{cases}$$ questa condizione si dice **necessaria**.

Questo si spiega col fatto che nei punti di massimo e minimo relativo il piano tangente al grafico della funzione è parallelo al piano xy.

L'equazione del piano tangente è $z = f(x_0, y_0) + f_x^{'}(x_0, y_o)(x - x_0) + f_y^{'}(x_0, y_0)(y - y_0)$, affinché sia parallelo al piano xy deve avere equazione del tipo z=k e questo avviene solo quando le derivate parziali rispetto a x e rispetto a y nel punto (x_0, y_0) sono entrambe nulle.

Le soluzioni del sistema sono detti punti **critici** o **stazionari**. Questi punti sono quelli che eventualmente rappresentano i massimi o i minimi relativi per la funzione, la condizione però non è sufficiente per stabilirlo.

Per stabilire se un punto stazionario (x_0, y_0) è eventualmente massimo o minimo relativo per la funzione si deve considerare il determinante del secondo ordine

$H(x,y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$ detto hessiano e calcolare $H(x_0, y_0)$, (condizione **sufficiente**).

Se $H(x_0, y_0) > 0 \;\; e \;\; f''_{xx}(x_0, y_0) > 0$, il punto (x_0, y_0) è un **minimo relativo**.

Se $H(x_0, y_0) > 0 \;\; e \;\; f''_{xx}(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) è un **massimo relativo**.

Se $H(x_0, y_0) < 0$, il punto (x_0, y_0) non è massimo o minimo relativo ed è detto **punto di sella**.

Se $H(x_0, y_0) = 0$, i massimi e i minimi relativi non possono essere determinati con questo metodo.

Esempio

$z = 2x^2 - 4y^2 - 8y$

$$\begin{cases} 4x = 0 \\ -8y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$ (0,-1)

$H(0,-1) = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -32$. In base alla teoria siamo in presenza di un punto di sella.

Si può ora calcolare la quota f(0,-1)=4.