

LOGICA MATEMATICA

La **logica** è la parte della matematica che si interessa della correttezza del ragionamento.

Introduciamo il concetto di enunciato.

Un **enunciato** o **proposizione** è una frase di senso compiuto della quale si può dire se è vera oppure falsa.

Le proposizioni si indicano con le lettere minuscole dell'alfabeto e la frase si racchiude fra doppie parentesi.

Sono esempi di proposizioni:

p : « sette è un numero primo » , q : « Roma è la capitale della Francia ». E' evidente che alla prima proposizione attribuiamo il valore vero V , alla seconda il valore falso F .

Non è una proposizione r : « Milano è una bella città» perché di questa frase non si può dire in modo inequivocabile se sia vera oppure falsa.

Le proposizioni godono di due importanti principi, **non contraddizione** e **terzo escluso**.

Il primo prevede che una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa, il secondo stabilisce che una proposizione o è vera o è falsa, non ci sono altre possibilità.

I CONNETTIVI

I **connettivi** sono delle operazioni che collegano fra di loro le proposizioni oppure agiscono su una sola di esse.

La prima è la **negazione** che opera su un solo enunciato.

Data una proposizione p , la sua negazione si indica con \bar{p} oppure con $\neg p$ e si costruisce antepoendo alla proposizione "non è vero che".

Ad esempio se consideriamo p : « quattro è multiplo di due », la sua negazione è

\bar{p} : « non è vero che quattro è multiplo di due ». E' chiaro che il valore di p è vero, mentre quello di \bar{p} è falso.

La negazione quindi fa diventare falsa una proposizione vera e vera una falsa, cambia in sostanza il suo valore.

Di questa operazione si può costruire una tabella detta **tabella di verità**

p	\bar{p}
V	F
F	V

La **coniunzione** è il connettivo che collega due proposizioni con la "e" (latino et) e si indica col simbolo \wedge .

Prese in considerazione le proposizioni p : « Il Po bagna la Lombardia » e q : « Rovigo è in Veneto », la **proposizione composta** è $p \wedge q$: « Il Po bagna la Lombardia e Rovigo è in Veneto ».

Per i valori di verità si può costruire la tabella

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

La congiunzione dunque è quel connettivo col quale si ottiene la proposizione $p \wedge q$ che è vera nel caso in cui p e q sono entrambi veri e falsa in tutte le altre eventualità.

La **disgiunzione inclusiva** opera su due proposizioni mediante la "o" e il simbolo è \vee . Questo connettivo sui due enunciati equivale a dire "o uno o l'altro o tutti e due". E' diverso da ciò che accade in lingua italiana dove la congiunzione o è equivalente a oppure, ed è usata col significato di uno oppure l'altro. Se dico "mangio il pane o i grissini", significa che mangerò solo uno dei due alimenti.

La tabella di verità è:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Facciamo anche in questo caso un esempio, se consideriamo le due proposizioni

p: «Tre è divisore di dodici» e q: «Otto è multiplo di due», la proposizione composta è $p \vee q$: «Tre è divisore di dodici o otto è multiplo di due».

Riassumendo la disgiunzione inclusiva è il connettivo che rende la proposizione ottenuta vera in tre casi e falsa quando lo sono entrambe quelle di partenza.

Un altro connettivo è la **disgiunzione esclusiva** che si indica col simbolo \vee , la proposizione composta si ottiene mediante la congiunzione “o” e il significato è “una oppure l’altra”

La tabella di verità è:

p	q	$p \vee q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Questo connettivo dà come risultati due veri e due falsi.

L’**implicazione materiale** è il connettivo che si indica con \rightarrow oppure con la doppia freccia e la proposizione composta, date p e q, si ottiene con “se p allora q”, è ciò che si incontra spesso in matematica “se.....allora”.

Un esempio, se prendiamo in esame p: «Torino è il capoluogo del Piemonte» e q: «L’Adige bagna Verona»,

abbiamo $p \rightarrow q$: «Se Torino è il capoluogo del Piemonte allora l’Adige bagna Verona».

Costruiamo ora la tabella di verità:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L’implicazione materiale restituisce per la proposizione composta tre veri e un falso.

L’ultimo connettivo è la **doppia implicazione materiale** indicata col simbolo \leftrightarrow oppure con \Leftrightarrow e la proposizione composta date p e q si forma con “p se e solo se q”, è quello che in matematica suona come “se e solo se.... allora”.

E’ formata da due implicazioni materiali “se p allora q” e “se q allora p”

La tabella nel caso in questione è:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'operazione dà come risultati due veri e due falsi.

Con i connettivi si possono creare, partendo da due o più proposizioni, diverse proposizioni composte.

Sono esempi $(p \vee q) \wedge q$, $(\bar{p} \rightarrow q) \wedge q$.

Di queste, due sono particolari (la **tautologia** e la **contraddizione**).

Una tautologia è una proposizione composta che è sempre vera indipendentemente dai valori delle proposizioni che la compongono. Una contraddizione è una proposizione composta sempre falsa indipendentemente dai valori delle proposizioni che la compongono.

Vediamo ora la tabella di verità di $(\bar{p} \rightarrow q) \wedge q$

Per realizzarla bisogna creare tante colonne in modo da svolgere in sequenza i vari connettivi.

p	q	\bar{p}	$\bar{p} \rightarrow q$	$(\bar{p} \rightarrow q) \wedge q$
V	V	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F

Concludiamo questa breve trattazione con un esempio di tautologia e uno di contraddizione

La tautologia $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ ha la seguente tabella di verità:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \wedge (p \rightarrow q)$	$[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Questa proposizione $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \bar{p})$ è una contraddizione e la sua tabella di verità è la seguente:

p	q	\bar{q}	$p \rightarrow q$	$p \wedge \bar{q}$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \bar{q})$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Se l'appunto ti è piaciuto visita l'home page all'indirizzo www.sefed.altervista.org e, se vuoi, clicca su mi piace che trovi all'interno della pagina.