www.sefed.altervista.org

Infinitesimi e infiniti

Per il calcolo dei limiti è molto importante conoscere gli **infinitesimi e gli infiniti**.

Infinitesimi

Si dice che una funzione $f(x)$ è un **infinitesimo** per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$,lo stesso si può dire se $x \to \pm\infty$.

Ad esempio

$f(x) = 3x - 3$ è un infinitesimo per $x \to 1$, infatti $\lim_{x \to 1}(3x - 3) = 0$, $f(x) = \frac{1}{x-2}$ è un infinitesimo per $x \to \infty$.

Gli infinitesimi si possono **confrontare** in base al risultato del limite del rapporto delle due funzioni. Più precisamente se $f(x)$ e $g(x)$ sono due infinitesimi per $x \to x_0$, allora

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesimi dello **stesso ordine** per $x \to x_0$

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine superiore** rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine inferiore** rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

In particolare se $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ i due infinitesimi si dicono **equivalenti**.

f(x)=senx e g(x)=x sono equivalenti in quanto è noto che $\lim_{x \to x0} \frac{senx}{x} = 1$, lo sono anche, ricordando i limiti notevoli, ln(1+x) e x , tgx e x, $e^x - 1 \quad e \quad x$.

Dire che un infinitesimo è di ordine superiore per $x \to x_0$ rispetto ad un altro, significa che “tende più velocemente a zero” rispetto a quest’ultimo.

Nel calcolo dei limiti si può sostituire un infinitesimo con uno equivalente e ,nelle somme, si possono eliminare gli infinitesimi di ordine superiore che, tendendo più rapidamente a zero, sono trascurabili. così

$$\lim_{x \to 0}(5x^4 + x^2) = \lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Vediamo di applicare queste regole in alcuni casi.

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x^2} = \infty$ (si è sostituito $e^x - 1 \quad con \quad x$).

$\lim_{x \to 0} \frac{tgx}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$ (si sono sostituiti $tgx \quad con \quad x \quad e \quad e^x - 1 \quad con \quad x$).

$\lim_{x \to 0} \frac{senx}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$ (si sono sostituiti $senx \quad con \quad x \quad e \quad \ln(1+x) \quad con \quad x$).

Infiniti

Si dice che f(x) è un **infinito** per $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$, lo stesso si può dire se $x \to \pm\infty$.

Così $f(x) = \frac{1}{x-1}$ è un infinito per $x \to 1$,infatti $\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$.

Confronto di infiniti

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l \neq 0$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infiniti dello **stesso ordine** per $x \to x_0$

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ $f(x)$ è un infinito di **ordine superiore** rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

se

$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ $f(x)$ è un infinito di **ordine inferiore** rispetto a $g(x)$ per $x \to x_0$.

Dire che un infinito è di ordine superiore rispetto ad un altro per $x \to x_0$ significa che "cresce più velocemente" di quest'ultimo.

In pratica a^x con a>1 è un infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di x.
Una potenza di x è infinito di ordine superiore rispetto a qualunque potenza di grado inferiore.

$\log_a x$ con a>1 è un infinito di ordine inferiore rispetto a qualunque potenza di x .
In una somma algebrica di " più infiniti" ha valore solo quello di ordine superiore, gli altri si possono eliminare.

Esempi

$$\lim_{x \to x+\infty} (x^4 - 3x^2 + x) = \lim_{x \to x+\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x \to x+\infty} \frac{x^2 + x}{e^x + x^3} = \lim_{x \to x+\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Nel calcolo si sono eliminati da numeratore e denominatore gli infiniti di ordine inferiore e si è tenuto conto che e^x è un infinito di ordine superiore rispetto a x^2.

$$\lim_{x \to x+\infty} (x-1) \cdot e^{-\sqrt[3]{x-1}} = \lim_{x \to x+\infty} \frac{x-1}{e^{\sqrt[3]{x-1}}} = 0$$

$$\lim_{x \to x+\infty} [x - \ln(x^2 - 3x + 2)] = \lim_{x \to x+\infty} [\ln e^x - \ln(x^2 - 3x + 2)] =$$

$$\lim_{x \to x+\infty} \ln \frac{e^x}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$$