

Formule di prostaferesi

Le formule di prostaferesi consentono di avere le somme **senp+senq** , **cosp+cosq** e le differenze **senp-senq** , **cosp-cosq** in funzione del doppio prodotto delle stesse funzioni goniometriche di angoli che sono la semisomma o la semidifferenza degli angoli dati. Per ricavare **senp+senq** , riscriviamo le formule di addizione e sottrazione per il seno.

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}\beta$$

$$\text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen}\beta .$$

Sommando membro a membro le due uguaglianze si ottiene:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}\alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{sen}\beta + \text{sen}\alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{sen}\beta$$

e riducendo i termini simili:

$$\text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta) = 2\text{sen}\alpha \cos \beta . \quad (1)$$

Adesso si pongono

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \\ \alpha - \beta = q \end{cases}$$

Dalla soluzione del sistema si ricavano le due soluzioni $\alpha = \frac{p+q}{2}$ e $\beta = \frac{p-q}{2}$.

Sostituendo nella 1 si determina la prima delle formule di prostaferesi:

$$\text{sen}p + \text{sen}q = 2\text{sen}\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$$

Con procedimenti analoghi si ricavano le seguenti altre formule:

$$\text{sen}p - \text{sen}q = 2\text{sen}\frac{p-q}{2} \cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\text{sen}\frac{p+q}{2} \text{sen}\frac{p-q}{2}$$

Esercizio

Calcolare il valore di $\text{sen}75^\circ + \text{sen}15^\circ$.

Applicando la prima formula avremo:

$$\text{sen}75^\circ + \text{sen}15^\circ = 2\text{sen}45^\circ \cos 30^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} .$$