

## Formule di duplicazione

Le formule di duplicazione mettono in relazione le funzioni goniometriche del doppio di un angolo con quelle dell'angolo stesso.

Per ricavarle si utilizzano le formule di addizione, in quanto  $2\alpha$  può essere scritto come  $\alpha + \alpha$ .

Quindi:

$$\operatorname{sen}2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \operatorname{sen}\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

In modo analogo:

$$\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Riassumendo si ha il seguente quadro:

$$\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Queste formule si possono utilizzare per ricavare il seno, il coseno o la tangente di un angolo che misura due volte quello del quale sono noti i valori delle funzioni goniometriche.

### **Esercizio**

Determinare il valore del seno, del coseno e della tangente di  $120^\circ$

$$\operatorname{sen}120^\circ = \operatorname{sen}2 \cdot 60^\circ = 2\operatorname{sen}60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^\circ = \cos 2 \cdot 60^\circ = \cos^2 60^\circ - \operatorname{sen}^2 60^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}120^\circ = \operatorname{tg}2 \cdot 60^\circ = \frac{2\operatorname{tg}60^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 60^\circ} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3};$$