

## Equazioni goniometriche elementari

Una **equazione goniometrica** è una uguaglianza fra due espressioni goniometriche che è soddisfatta per uno o più valori dell'angolo incognito.

Una **equazione goniometrica elementare** può avere una delle seguenti forme:

$$\text{sen}x=p; \text{cos}x=q, \text{tg}x=r.$$

Risolvere una equazione goniometrica significa determinare i valori degli angoli che la soddisfano. A tal fine è bene precisare che il seno e il coseno hanno **periodicità**  $360^\circ$ , la tangente invece ha periodicità  $180^\circ$ . La periodicità è il minore angolo che aggiunto ad un altro qualsiasi dà lo stesso valore della funzione goniometrica.

In altri termini il seno e il coseno si "ripetono" dopo  $360^\circ$ , la tangente dopo  $180^\circ$ .

Così ad esempio il seno vale  $\frac{1}{2}$  a  $30^\circ$ , a  $390^\circ$  ( $30^\circ+360^\circ$ ), a  $750^\circ$  ( $390^\circ+360^\circ$ ) e così via.

L'equazione

$$\text{sen}x=p$$

ha come soluzioni gli infiniti angoli  $x=\arcsen(p)+k \cdot 360^\circ$  (l'arco il cui seno è uguale a p al quale è aggiunta la periodicità) con  $k=0 \pm 1, \pm 2, \dots$

### **Esempio**

$\text{sen}x=\frac{\sqrt{3}}{2}$  ha come soluzioni  $x=60^\circ + k \cdot 360^\circ$  e  $x=120^\circ + k \cdot 360^\circ$  (sono gli angoli nei quali il

seno vale  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ) o in radianti  $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi$  e  $x=\frac{2}{3}\pi+2k\pi$ .

Volendo esplicitare i valori della x troviamo  $60^\circ, 420^\circ, 780^\circ$  ecc. ottenuti per  $k=0, 1, 2$  ecc. per la prima soluzione e  $120^\circ, 480^\circ, 840^\circ$  ecc. per la seconda soluzione (si sono tralasciati i valori negativi).

Analogamente al seno,

$$\text{cos}x=q$$

ha per soluzioni

$$x=\arccos(p)+k \cdot 360^\circ$$

### **Esempio**

Risolvere l'equazione  $\text{cos}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

le soluzioni sono  $x=45^\circ + k \cdot 360^\circ$  e  $x=315^\circ + k \cdot 360^\circ$ , la seconda soluzione si può anche scrivere  $x=-45^\circ + k \cdot 360^\circ$ .

In radianti:  $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$  e  $x=\frac{7}{4}\pi+2k\pi$  oppure  $x=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$ .

Se si vuole risolvere l'equazione.

$$\text{tg}x=r$$

si avranno le soluzioni

$$x=\text{arctg}(x)+k \cdot 180^\circ$$

C'è da notare che in questo caso per quanto detto precedentemente, la periodicità è  $180^\circ$ .

### **Esempio**

Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\text{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Le soluzioni sono

$$x=30^\circ + k \cdot 180^\circ \quad \text{oppure} \quad x=\frac{\pi}{6} + k\pi.$$





Le soluzioni dell'equazione  $\text{sen}x=p$  sono costituite dagli infiniti angoli  $x=\arcsen(p)+k$

