

Polinomi

Un **polinomio** è costituito dalla somma algebrica di due o più monomi non simili fra loro. Quando compaiono monomi simili il polinomio si dice non in **forma normale**.

Il polinomio $3x^2y^3 + \frac{1}{2}xy^2 - 2xy + 4$ è in forma normale.

$2x^2y + \frac{1}{4}xy^4 - 3x^2y + 5$ si riduce in forma normale sommando i monomi simili.

I monomi che formano il polinomio si dicono **termini** del polinomio. Un polinomio con due termini si dice **binomio**, con tre **trinomio**, con quattro **quadrinomio** ecc. Si definisce **grado** di un polinomio **rispetto ad una lettera** il maggiore esponente di quella lettera. Si dice **grado** di un polinomio quello maggiore di tutti i termini del polinomio. Il primo monomio sopra è di 2° grado rispetto a x e di 3° grado rispetto a y. Complessivamente ha grado 5. Un polinomio può avere una o più lettere. I polinomi sopra sono esempi con due lettere. Un polinomio si dice **omogeneo** quando i suoi termini hanno tutti lo stesso grado.

$a^5 + 3a^4b + 2a^3b^2 + \frac{1}{4}a^2b^3 + 4ab^4 - 3b^5$ è un polinomio omogeneo di 5° grado nelle lettere a e b.

Un polinomio può essere **ordinato** secondo le potenze **crescenti** o **decrescenti** di una lettera.

$a^5 + 2a^4 + 3a^3 + a^2 + 2a - 6$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera a, il termine noto è la potenza di grado 0.

$1 + a + 2a^2 + 3a^3 + a^4$ è ordinato secondo le potenze crescenti della lettera a. Un polinomio ovviamente può essere ordinato anche quando è formato da termini con più lettere.

Operazioni con i polinomi

Addizione algebrica

L'addizione algebrica di due o più monomi si esegue sommando fra di loro i termini **simili**.

Esempio

$$(1 + 3a + a^2 + a^3) + (2a^2 + a^3 - 4) - (6 - 5a + a^2) = 1 + 3a + a^2 + a^3 + 2a^2 + a^3 - 4 - 6 + 5a - a^2 =$$
$$-9 + 8a + 2a^2 + 2a^3.$$

Riassumendo, in presenza di una somma algebrica si tolgono le parentesi ricordando che il segno + lascia invariati i segni all'interno della parentesi, il segno - li fa cambiare.

Se fra i coefficienti ci sono delle frazioni conviene procedere nel modo seguente.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} + 2x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3\right) + (x^2 + 2x^3 - 4) - \left(2 - \frac{1}{4}x + 5x^3\right) = \\ & \frac{1}{2} + 2x + 3x^2 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 + 2x^3 - 4 - 2 + \frac{1}{4}x - 5x^3 = \left(\frac{1}{2} - 4 - 2\right) + \left(2 + \frac{1}{4}\right)x + (3 + 1)x^2 + \left(-\frac{2}{3} + 2 - 5\right)x^3 \\ & = \left(\frac{1 - 8 - 4}{2}\right) + \left(\frac{8 + 1}{4}\right)x + 4x^2 + \left(\frac{-2 + 6 - 15}{3}\right)x^3 = -\frac{11}{2} + \frac{9}{4}x + 4x^2 - \frac{11}{3}x^3. \end{aligned}$$

Moltiplicazione di un monomio per un polinomio

La moltiplicazione di un monomio per un polinomio si esegue moltiplicando il monomio per tutti i termini del polinomio.

Esempi

$$3xy(2x^2y - 4xy^2 + x) = 6x^3y^2 - 12x^2y^3 + 3x^2y$$

$$\frac{1}{2}xy\left(\frac{3}{4}x^2y - 2xy^2 + \frac{1}{3}x\right) = \frac{3}{8}x^3y^2 - x^2y^3 + \frac{1}{6}x^2y$$

Moltiplicazione di polinomi

La moltiplicazione di due polinomi si esegue moltiplicando ciascun termine del primo polinomio per tutti i termini del secondo polinomio.

Esempio

$$\begin{aligned} (3xy + 2y)(x^2y - x^2y^2 + xy) &= 3x^3y^2 - 3x^3y^3 + 3x^2y^2 + 2x^2y^2 - 2x^2y^3 + 2xy^2 = \\ &= 3x^3y^2 - 3x^3y^3 + 5x^2y^2 - 2x^2y^3 + 2xy^2 \end{aligned}$$

Somma per differenza

E' un caso particolare di moltiplicazione

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Esempio

$$(4x + y)(4y - y) = 16x^2 - y^2$$

Potenza di un polinomio

Quadrato di binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Si perviene a questo risultato scrivendo $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Si può dire che un quadrato di binomio si sviluppa in quadrato del primo termine, doppio prodotto del primo per il secondo, quadrato del secondo termine.

Per quanto riguarda i segni i quadrati sono positivi, il segno del doppio prodotto dipende da quelli dei due termini, è positivo se sono concordi e negativo se sono discordi.

Esempi

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$(x - 3y)^2 = x^2 - 6xy + 9y^2$$

Cubo di binomio

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

La formula si ottiene moltiplicando $(a + b)^2$ per $(a + b)$

Quindi il cubo di binomio si sviluppa in cubo del primo termine, triplo prodotto del quadrato del primo per il secondo, triplo prodotto del primo per il quadrato del secondo, cubo del secondo termine. I segni si ottengono automaticamente procedendo come segue

$$(3x - 2y)^3 = 27x^3 + 3(3x)^2(-2y) + 3(3x)(-2y)^2 - 8y^3 = 27x^3 + 3(9x^2)(-2y) + 3(3x)(4y^2) - 8y^3 =$$
$$27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$$

Si può affermare che se i segni dei due termini sono +, i termini dello sviluppo sono tutti positivi, se invece sono uno + e l'altro - come nell'esempio sopra, i segni dello sviluppo sono alternati.

Queste pagine appartengono al sito Paginedimatematica

www.sefed.altervista.org