Logaritmi

Si definisce **logaritmo** in **base a** positiva e diversa da uno di un numero **b** positivo, l'esponente da dare ad a per ottenere b. Il numero b prende il nome di **argomento** del logaritmo.

Il logaritmo si denota con la scrittura $\log_a b$ (logaritmo in base a di b). In virtù della definizione, ad esempio, $\log_2 8 = 3$, in quanto l'esponente da dare a 2 per ottenere 8 è 3. I logaritmi più usati nei calcoli sono il logaritmo **decimale** e il logaritmo **neperiano**. Il primo ha **base dieci** e si indica con $\log b$, la base è sottintesa, il secondo ha base **e**, si indica con lnb (ln di b) e la base è ancora sottintesa. In questa ultima eventualità la base rappresenta il numero di Nepero ed è dato dall'espressione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ quando ad n si attribuiscono valori sempre crescenti, in termini più precisi è uguale al limite per n che tende all'infinito di $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$,il suo valore è 2,71…. .

Proprietà dei logaritmi

Il logaritmo del **prodotto** di due numeri è uguale alla **somma** dei logaritmi dei due numeri.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Per dimostrare questa proprietà poniamo

$$\log_a b = x \text{ e } \log_a c = y,$$

per la definizione di logaritmo si può scrivere

$$a^x = b \quad \textbf{e} \quad a^y = c$$

da queste due uguaglianze si ottiene

$$a^x \cdot a^y = b \cdot c$$

e per la proprietà delle potenze

$$a^{x+y} = b \cdot c \quad \text{da cui} \quad \log_a (b \cdot c) = x + y$$

quindi per le posizioni fatte precedentemente $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Il logaritmo del **quoziente** di due numeri è uguale alla **differenza** dei logaritmi dei due numeri.

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$$

Come prima poniamo

$$\log_a b = x \text{ e } \log_a c = y\text{,}$$

per la definizione di logaritmo si può scrivere

$$a^x = b \quad \textbf{e} \quad a^y = c$$

da queste due uguaglianze si ottiene

$$\frac{a^x}{a^y}=\frac{b}{c}$$

per la proprietà del quoziente di due potenze si ha

$$a^{x-y}=\frac{b}{c}$$

e passando al logaritmo

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=x-y$$

da cui, tenendo conto dei valori di x e y, si ottiene

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c\text{.}$$

Il logaritmo di una **potenza** è uguale all'esponente per il logaritmo della base della potenza.

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

Questa proprietà si dimostra ponendo

$$\log_a b = x$$

$$a^x = b$$

eleviamo i due membri a n

$$(a^x)^n = b^n \Rightarrow \quad a^{nx} = b^n \quad \Rightarrow \log_a b^n = nx \Rightarrow \log_a b^n = n \log_a b.$$

Cambiamento di base

La relazione fra un logaritmo in base a e uno in base c è la seguente:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Dimostrazione

Poniamo

$$\log_a b = x$$

da cui

$$a^x = b$$

calcolando il logaritmo in base c dei due membri dell'uguaglianza si ottiene

$$\log_c a^x = \log_c b$$

per la proprietà della potenza

$$x \log_c a = \log_c b$$

quindi

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

da cui, tenendo conto del valore di x, si ricava

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$