Integrale indefinito

L'operazione di **integrale indefinito** è l'inversa della derivata di una funzione. Calcolare l'integrale indefinito della funzione f(x) detta **funzione integranda**, equivale a determinare un'altra funzione F(x) chiamata **primitiva** la cui derivata prima è uguale a f(x). Il simbolo di integrale è una s allungata.

In formula:

$$\int f(x)dx$$

Si legge "integrale di effe di x in de x". Il simbolo dx sta ad indicare che l'integrale viene calcolato rispetto ad x.

In base alla definizione

$$\int f(x)dx = F(x) \quad \Leftrightarrow \quad DF(x) = f(x)$$

Considerando che la derivata di qualsiasi costante è uguale a zero, da

$$\int f(x)dx = F(x)$$

si arriva a concludere che

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

In altri termini nell'operazione di integrale indefinito è sempre presente una costante che si chiama **costante di integrazione.**

Detto questo, come fatto per le derivate, si può costruire una tabella degli integrali indefiniti immediati. I principali sono i seguenti:

$\int dx = x + c$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\int \cos x dx = senx + c$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + c$	$\int (-senx)dx = \cos x + c$
$\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + c$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + c$

Regole di integrazione

Integrale di una **costante per una funzione**

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

Integrazione per **decomposizione**

$$\int [f(x)+g(x)+h(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx$$

Ovviamente la regola vale qualunque sia il numero delle funzioni.

Nel primo caso ad esempio

$$\int 4\cos x dx = 4\int \cos x dx = 4 sen x + c$$

Nel secondo

$$\int\left(x+\frac{1}{x}+e^x\right)dx = \int x dx + \int \frac{1}{x}dx + \int e^x dx = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + e^x + c$$

Un’altra importante regola di derivazione è quella per **parti** .

Si può determinare partendo dalla regola della derivata di un prodotto

$$Df(x)g(x) = f^{'}(x)g(x) + f(x)g^{'}(x)$$

che si può scrivere

$$f^{'}(x)g(x) = Df(x)g(x) - f(x)g^{'}(x)$$

integrando termine a termine si ottiene

$$\int f^{'}(x)g(x)dx = \int Df(x)g(x)dx - \int f(x)g^{'}(x)dx$$

da cui

$$\int f^{'}(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g^{'}(x)dx$$

Le ultime due formule sono equivalenti perché l’integrale e la derivata di una funzione sono operazioni una l’inversa dell’altra.

$$f^{'}(x)$$

è detta **fattore differenziale**, mentre g(x) si chiama **fattore finito**.

La regola dell’integrazione per parti si utilizza quando si deve calcolare l’integrale di un prodotto di due funzioni delle quali una è la derivata di una funzione nota.

Esempio

Volendo calcolare

$$\int xe^x dx$$

Dobbiamo scegliere fra le due funzioni il fattore finito e quello differenziale. Sarà

$$f'(x)=e^x$$

e g(x)=x.

Questa scelta è motivata dal fatto che la derivata di x è uguale a 1 e quindi è semplice calcolare l'integrale che si trova al secondo membro dell'uguaglianza. Allora

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$

Vi sono poi degli integrali che si risolvono ragionando sulle derivate delle funzioni composte.

Ad esempio

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \ln\left|x^2+3x+5\right| + c$$

Infatti se si prova a derivare il secondo membro si ottiene esattamente la funzione integranda. Generalizzando se la funzione da integrare è una frazione in cui il numeratore è la derivata del denominatore, l'integrale è costituito dal logaritmo neperiano del denominatore.

Da questi quattro casi:

$$\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c;$$

$$\int \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x) dx = \sqrt{f(x)} + c;$$

$$\int \cos f(x) f'(x) dx = sen f(x) + c; \qquad \int sen f(x) f'(x) dx = -\cos f(x) + c;$$

si può trarre la regola generale, se nella funzione compare f(x), si possono applicare le regole viste prima se la funzione è moltiplicata per

$f'(x)$.

Integrazione per **sostituzione**

Per illustrare questo metodo partiamo da un esempio

$$\int \sqrt{2x+1}dx$$

Si pone 2x+1=t

da cui

$$x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}$$

Differenziando membro a membro

$$dx = \frac{1}{2}dt$$

Sostituendo nell'integrale si ottiene

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \int \sqrt{t}\,\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sqrt{t}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\sqrt{t^3} + c$$

Passando di nuovo nella variabile x si ha:

$$\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3} + c$$

In generale se

$$x = \varphi(t) \quad \Rightarrow \quad dx = \varphi'(t)dt$$

e quindi

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt + c$$