<u>Integrale definito</u>

L'integrale definito della funzione **f(x) ,** continua e positiva nell'intervallo [**a**,**b**], si può sintetizzare con la scrittura:

$$\int_a^b f(x)dx$$

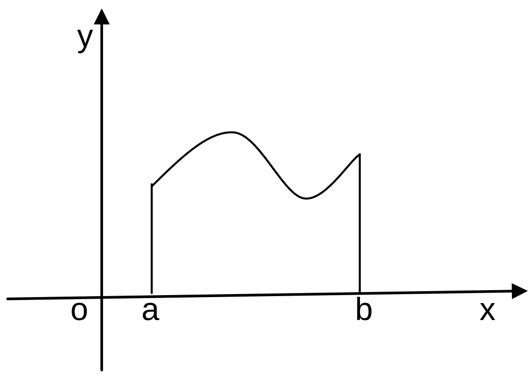
a e b sono detti **estremi d'integrazione,** f(x) è la **funzione integranda**.

Questo tipo di integrale si calcola determinando la primitiva F(x) di f(x) ed eseguendo la differenza fra i valori F(b) e F(a).

In formula,

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Si dimostra che l'integrale definito calcolato sull'intervallo [a,b] della funzione f(x) continua in esso rappresenta la misura dell'area racchiusa dal grafico della funzione, dall'asse delle x e dalle rette di equazione x=a e x=b (vedi figura).



Proprietà dell'integrale definito:

a) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$

b) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

c) $\int_a^a f(x)dx = 0$

d) $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

e) $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

Quest'ultima proprietà si applica nel calcolare l'integrale definito di una funzione continua

nell'intervallo [a,c] e b è un punto interno ad [a,c].

Nel calcolo delle aree se queste sono situate al di sotto dell'asse delle x, bisogna anteporre all'integrale il segno – in modo che il risultato venga positivo (ciò perché non ha senso parlare di aree negative).

Esempi

1) $\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = 9 - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}$

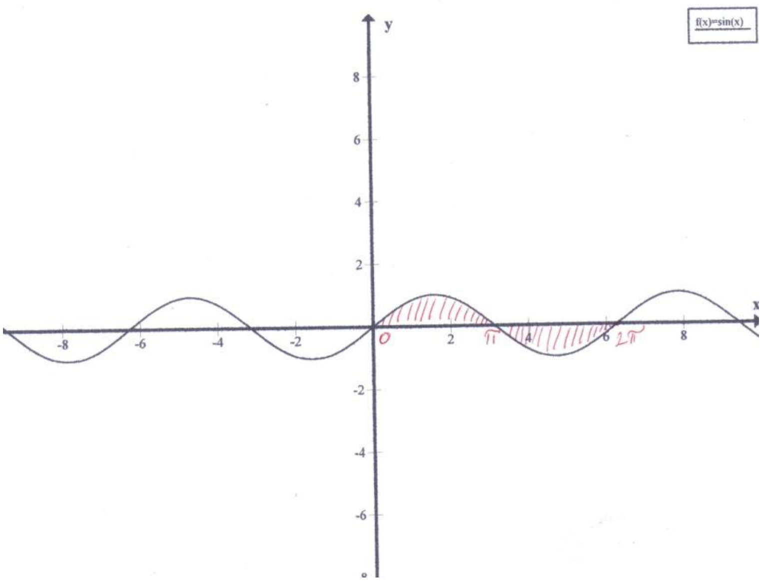
2) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

3) $\int_2^3 (x^2 + x \quad +3)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3x\right]_2^3 = 9 + \frac{9}{2} + 9 - (\frac{8}{3} + 2 + 6) = \frac{45}{2} - \frac{32}{3} = \frac{135-64}{6} = \frac{71}{6}$

4) $\int_0^\pi senxdx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2$

5) Calcolare l'rea racchiusa dal grafico della funzione y=senx e dall'asse delle x nell'intervallo $[0,2\pi]$ (*figura sotto*)

$$\int_0^{2\pi} senxdx = \int_0^\pi senxdx - \int_\pi^{2\pi} senxdx = [-\cos x]_0^\pi - [-\cos x]_\pi^{2\pi} = -\cos\pi + \cos 0 + \cos 2\pi - \cos\pi = 4$$



Il segno meno davanti al secondo integrale è giustificato dal fatto che l'area dell'intervallo $[\pi, 2\pi]$ è situata sotto l'asse delle x.

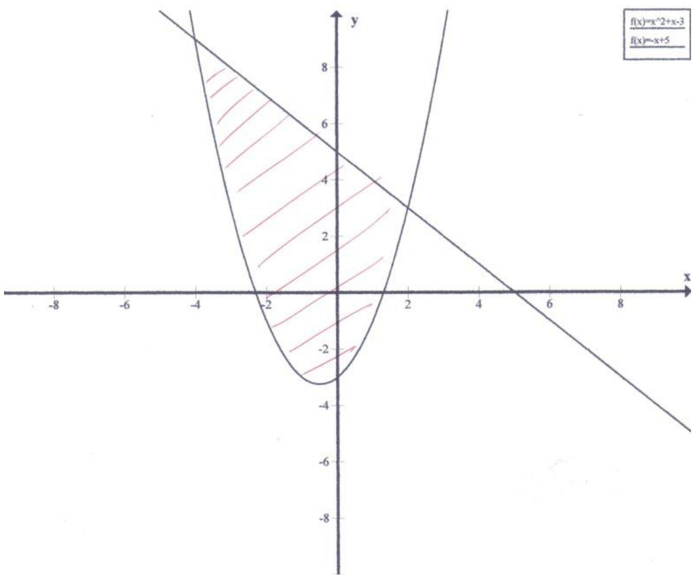
6) Calcolare l'area racchiusa dal grafico delle funzioni $y = x^2 + x - 3 \quad e \quad y = -x + 5$

nell'intervallo $[-4,2]$ (figura sotto).

In questo caso si procede come segue

$$A = \int_{-4}^{2} (-x+5)dx - \int_{-4}^{2} (x^2 + x - 3)dx = \int_{-4}^{2} (-x+5-x^2-x+3)dx = \int_{-4}^{2} (-x^2-2x+8)dx = [\frac{-x^3}{3} - x^2 + 8x]_{-4}^{2} =$$

$$\frac{-8}{3} - 4 + 16 - (\frac{64}{3} - 16 - 32) = \frac{28}{3} + \frac{80}{3} = \frac{108}{3}$$



Si è determinata questa superficie in base alla proprietà che afferma che l'area situata fra i grafici di due funzioni in un dato intervallo si trova calcolando l'integrale fra gli estremi dell'intervallo della differenza delle due funzioni, facendo attenzione a posizionare come primo termine quella col grafico più in alto.