

Funzioni di due variabili

Una **funzione di due variabili** è una relazione che associa ad ogni coppia di numeri reali $(x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, uno ed un solo valore reale di z . D è il **dominio** della funzione, x e y sono le **variabili indipendenti**, z la **variabile dipendente**.

Per indicare una funzione di due variabili si usa la scrittura $z = f(x, y)$.

Il **dominio** è l'insieme dei valori reali che si possono attribuire alle variabili indipendenti x e y affinché sia determinabile il corrispondente valore della variabile dipendente z .

Sono esempi di funzioni di due variabili

$$z = 3x^2y + 2xy$$

$$z = \frac{xy - 3x^2y}{x + y - 4}$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

Il dominio della prima funzione è costituito da tutte le coppie di numeri reali appartenenti a \mathbb{R}^2 o da tutti i punti del piano, infatti in questa funzione le operazioni che occorre svolgere per trovare il valore di z , noti quelli di x e y , sono sempre possibili nel campo dei numeri reali. Considerato che i punti del piano si rappresentano mediante coppie di numeri reali è indifferente parlare di queste ultime o di punti del piano.

Il dominio della seconda funzione è formato da tutte le coppie di numeri reali escluse quelle che annullano il denominatore (i punti che si trovano sulla retta di equazione $x + y - 4 = 0$).

La terza funzione è definita sui punti esterni della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4 = 0$ e sui punti della circonferenza stessa. Questo risultato si ottiene ponendo il radicando maggiore o uguale a zero, infatti la radice quadrata di un numero è possibile solo quando il radicando è positivo o nullo.

Rappresentando una funzione di due variabili in un sistema tridimensionale xyz , analogamente a quella di una variabile per la quale si usa il piano xy , il dominio si trova nel piano xy . In definitiva per trovare il dominio di una funzione di due variabili si utilizzano le seguenti regole:

- 1) se la funzione è razionale intera il dominio è costituito da \mathbb{R} , cioè da tutte le coppie ordinate di numeri reali;
- 2) se la funzione è razionale fratta il dominio si determina ponendo il denominatore diverso da zero;
- 3) se la funzione è irrazionale a indice pari il dominio si calcola ponendo il radicando ≥ 0 ;
- 4) se la funzione è logaritmica si pone l'argomento > 0 .

Nei casi più complessi il dominio si determina mediante un sistema in cui si inseriscono le varie condizioni.

Ad esempio per trovare il dominio della funzione $z = \sqrt{y - x^2 - x + 3} + \ln(x + y - 5)$ si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y - x^2 - x + 3 \geq 0 \\ x + y - 5 > 0 \end{cases}$$

Il **grafico** di una funzione di due variabili è costituito da una superficie e, a differenza di quello di una funzione di una variabile che è una linea, è difficile da rappresentare a meno che non si disponga di un software ad hoc.

Una semplice rappresentazione grafica di una funzione di due variabili è quella delle **linee** o **curve di livello**. Le linee di livello si ottengono sezionando il grafico di una funzione di due variabili con dei piani paralleli al piano xy e proiettando le linee ottenute su quest'ultimo piano. Per determinarle si risolve il sistema

$$\begin{cases} z = f(x, y) \\ z = k \end{cases}, \text{ si trovano cioè i punti di intersezione fra la funzione (il suo grafico) e un fascio di piani}$$

paralleli al piano xy . L'insieme di questi punti di intersezione costituiscono delle linee.

Per tracciare alcune di queste linee di livello basta attribuire nell'equazione risolvente il sistema numeri reali a piacere a k , generalmente si danno numeri interi.

Graficamente le **linee di livello** possono essere rette parallele, circonferenze concentriche, parabole, ellissi ecc.

Le rette parallele si hanno nel caso in cui la funzione è lineare (piano), in questa eventualità attribuendo a k valori arbitrari si ottengono rette con lo stesso coefficiente angolare e quindi parallele. La funzione

$$z = x^2 + y^2 - 10$$

ha, ad esempio, per valori positivi di k , linee di livello che sono **circonferenze concentriche**. Le linee di livello della funzione $z = 2x^2 + y^2 - 1$ sono **parabole** i cui grafici sono situati uno all'interno dell'altro.

Dato che sostanzialmente le linee di livello si trovano sostituendo k al posto di z nella funzione, conoscendo la geometria analitica, è facile stabilire la natura delle linee di livello dall'espressione algebrica della funzione.

Le linee di livello vengono utilizzate in vari campi.

In geografia sono note le **isoipse**, linee che uniscono su una carta geografica o topografica tutti i punti aventi la stessa altitudine rispetto al livello del mare. Su una zona montana ad esempio ci sono la linea dei seicento metri, quella dei settecento metri, degli ottocento e così via.

In meteorologia le **isoterme** sono le linee che uniscono, su una carta del tempo (carta sinottica), tutti i punti con la stessa temperatura; le **isobare** quelle che uniscono i punti con la stessa pressione.

In analisi matematica le linee di livello si utilizzano per determinare i **massimi e i minimi liberi e vincolati** di una funzione di due variabili. Nel caso di massimi e minimi liberi se le linee di livello si restringono intorno ad un punto del dominio di una funzione di due variabili per valori crescenti di k , il punto rappresenta un massimo; se si restringono per valori decrescenti di k il punto è un minimo. Nel caso dei massimi e minimi vincolati questi ultimi si trovano nei punti di tangenza fra le linee di livello della funzione di due variabili e l'equazione del vincolo.

In economia si trovano le linee degli **isocosti** rappresentati dalle linee i cui punti hanno costi uguali, quelle degli isoquanti linee che uniscono punti aventi quantità uguali.

Un'altra applicazione è nella programmazione lineare. In questo tipo di problemi le linee di livello sono rette parallele e ci consentono di determinare il valore ottimo della funzione obiettivo.