

Equazioni logaritmiche

Una equazione logaritmica è una equazione nella quale l'incognita compare nell'argomento di qualche logaritmo.

Sono esempi

$$\log(x+3) = 2, \quad \log(x^2 + 4) = \log(x+1) + \log(2x+3).$$

In generale una equazione logaritmica si presenta nella forma

$$\log_a A(x) = \log_a B(x) \quad (1)$$

Per la soluzione si deve considerare che il logaritmo si può calcolare soltanto quando l'argomento è maggiore di zero, quindi saranno accettabili solo le soluzioni che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} A(x) > 0 \\ B(x) > 0 \end{cases}$$

Le soluzioni dell'equazione (1) si otterranno ponendo

$$A(x) = B(x)$$

In quanto due logaritmi con la stessa base sono uguali quando lo sono gli argomenti.

Per trasformare una qualsiasi equazione nella forma (1) si devono utilizzare le proprietà dei logaritmi, già trattate nello specifico argomento sui logaritmi.

Esempio

$$\log(x^2 - 1) = \log(x+1) + \log(2x-4)$$

Si risolve il sistema $\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x + 1 > 0 \\ 2x - 4 > 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x < -1; x > 1 \\ x > -1 \\ x > 2 \end{cases}$ che ha per soluzione $x > 2$.

L'equazione si trasforma nell'uguaglianza di due soli logaritmi utilizzando la proprietà: "il logaritmo del prodotto di due numeri è uguale alla somma dei logaritmi dei due numeri", cioè trasformando la somma di due logaritmi nel logaritmo del prodotto, quindi

$$\log(x^2 - 1) = \log[(x + 1)(2x - 4)]$$

Da cui

$$x^2 - 1 = (x + 1)(2x - 4)$$

$$x^2 - 1 = 2x^2 - 4x + 2x - 4$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}$$

$$x_1 = 3 \quad x_2 = -1$$

Delle due soluzioni solo 3 è accettabile in quanto soddisfa il sistema (2).

In queste equazioni a volte può comparire un numero e si procede moltiplicando quest'ultimo per uno (non si altera l'equazione) scritto come un logaritmo che ha l'argomento uguale alla base a sua volta la stessa degli altri che compaiono nell'equazione.

Esempio

$$\log_2(x + 3) + \log_2(3x + 5) = 5$$

Risolviamo il sistema

$$\begin{cases} x + 3 > 0 \\ 3x + 5 > 0 \end{cases}$$

Che ha per soluzione

$$x > -\frac{5}{3}$$

Moltiplichiamo ora 5 per

$$\log_2 2$$

In questo modo non modifichiamo l'equazione in quanto moltiplichiamo per 1 e abbiamo la possibilità di risolverla con i metodi precedenti.

$$\log_2(x+3) + \log_2(3x+5) = 5 \cdot \log_2 2$$

$$\log_2(x+3) + \log_2(3x+5) = \log_2 2^5$$

$$\log_2(x+3)(3x+5) = \log_2 32$$

$$3x^2 + 5x + 9x + 15 = 32$$

$$3x^2 + 14x - 17 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{100}}{3}$$

Si è usata la formula ridotta

Da cui

$$x_1 = -\frac{17}{3} \quad x_2 = 1$$

in questo caso la sola soluzione accettabile è $x=1$.