Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio si interessa dei **gruppi** che si possono formare con un certo numero di **oggetti** o **elementi** e del loro numero**,** nota la legge di composizione dei gruppi. Il numero di elementi con cui formare i gruppi generalmente si indica con **n,** il numero di elementi che deve contenere ciascun gruppo con **k**.

Ad esempio con le prime tre lettere dell'alfabeto a,b,c, si possono formare i seguenti gruppi di due lettere ciascuno ab, ac, bc. Se invece si considerano diversi due gruppi scambiando l'ordine degli elementi si formano i gruppi ab,ac,bc,ba,ca,cb. Nel prino caso avremo tre gruppi, nel secondo sei.

Disposizioni semplici

Si definiscono **disposizioni semplici** di n elementi di classe k (k≤n), tutti i gruppi di k elementi ciascuno che si riescono a formare con gli n elementi dati in modo che due gruppi qualsiasi differiscano fra loro o per l'ordine o per qualche elemento

Riprendendo l'esempio fatto sopra, con tre elementi si hanno sei disposizioni semplici (con tre elementi si sono formati sei gruppi di due elementi ciascuno). E' evidente che questi sei gruppi sono disposizioni semplici in quanto due qualunque di essi differiscono o per l'ordine degli elementi o per qualche elemento.

Se si prendono in esame le quattro lettere a,b,c,d, si possono formare le seguenti disposizioni semplici di classe due ab,ac,ad,bc,bd,cd,ba,ca,da,cb,db,dc. In questo caso otteniamo dodici disposizioni semplici.

Cerchiamo di ricavare una legge generale da questi due esempi, con n=3 e k=2, abbiamo 6 disposizioni semplici, con n=4 e k=2 sono 12. Il numero delle disposizioni di n elementi di classe k si indica col simbolo $D_{n,k}$.

Nel primo caso

$$D_{3,2} = 6 = 3 \cdot 2 = 3(3-1)$$

Nel secondo

$$D_{4,2} = 12 = 4 \cdot 3 = 4(4-1)$$

In generale

$$D_{n,k} = n(n-1)(n-2)..........(n-k+1)$$

Permutazioni semplici

Si definiscono **permutazioni semplic**i di n elementi, tutti i gruppi di n elementi ciascuno che si possono formare con gli n elementi dati.

Le permutazioni semplici di n elementi sono quindi le disposizioni semplici di n elementi di classe n. Il numero delle permutazioni semplici è dato da:

$$P_n = D_{n,n} = n(n-1)(n-2).........(n-n-1) = n(n-1)(n-2)..........1$$

Quest'ultimo rappresenta il fattoriale di n cioè il prodotto dei primi n numeri interi e si indica con n!.

Quindi

$$P_n = n!$$

Un esempio di permutazioni è il seguente: in quanti modi diversi si possono sedere tre studenti su tre sedie allineate? Se enumeriamo i ragazzi con 1,2,3, avremo:

123, 132, 213, 231, 312, 321.

Si sono ottenute sei permutazioni, infatti

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Per costruire i gruppi il metodo più semplice è quello di lasciare invariato il primo elemento e far variare gli altri, ripetendo il procedimento per i tre numeri.

Combinazioni semplici

Si definiscono **combinazioni semplici** di n elementi di classe k (k≤n) , tutti i gruppi di k elementi ciascuno che si riescono a formare con gli n elementi in modo che due gruppi qualsiasi differiscano fra loro soltanto per qualche elemento.

In questo caso due gruppi con gli stessi elementi in ordine diverso costituiscono la stessa combinazione.

Il numero delle combinazioni semplici lo si può ricavare considerando l'esempio di tre lettere prese due a due che è stato fatto sopra. Le disposizioni in questa eventualità sono 6, le combinazioni 3. Queste ultime sono la metà delle disposizioni. Quindi:

$$C_{3,2} = 3 = \frac{D_{3,2}}{2} = \frac{D_{3,2}}{2!}$$

Generalizzando, il numero delle combinazioni semplici di n elementi di classe k è:

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{k!}$$

Questa formula si può scrivere in un modo alternativo e indicare col simbolo

$$\binom{n}{k}$$

che prende il nome di **coefficiente binomiale.**

$$\binom{n}{k} = C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-k+1)}{k!}$$

moltiplicando numeratore e denominatore per

$$(n-k)!$$

si ottiene

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)..........(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)........(n-k+1)(n-k)(n-k-1).........1}{k!(n-k)!}$$

Quindi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dimostriamo ora due relazioni con i coefficienti binomiali.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad (*)$$

Del primo membro dell'uguaglianza conosciamo il risultato, sviluppiamo quindi il secondo.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

dato che il secondo membro è esattamente uguale al primo l'uguaglianza * è vera.

La seconda è

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad \mathbf{(**)}$$

Allo stesso modo di prima svolgiamo il secondo membro

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-k)(n-1)!+k(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!}$$

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Anche in questo caso il secondo membro è uguale al primo e quindi l'uguaglianza ** è vera.